Dreisatz - Begriffsbestimmungen

Definition
Der Dreisatz ist eine Methode bzw. ein Lösungsverfahren, um das Verhältnis von zwei oder mehr Zahlenwerten zu berechnen.

Beispiel:
Das Verhältnis von Britischen Pfund und Euros wird in einer Dreisatzaufgabe angegeben. Für eine bestimmte Anzahl von Britischen Pfund soll nun die entsprechende Euro-Summe ermittelt werden.

10 GBP	=	13 EUR
25 GBP	=	x EUR

Oder:

Für einen Arbeitsauftrag werden 10 Arbeiter eingesetzt. Die Arbeit ist nach 13 Stunden erledigt. Wann ist die Arbeit erledigt, wenn man 25 Arbeiter einsetzt?

10 Arbeiter	=	13 Stunden
25 Arbeiter	=	x Stunden

Der Begriff Dreisatz
Man kann den Begriff „Dreisatz“ wörtlich nehmen, da die Berechnungsmethode tatsächlich aus drei Sätzen besteht. Dies sind:

Der **Aussagesatz**	der Aussagesatz beschreibt das Verhältnis von Werten Hier: 10 GBP = 13 EUR
Der **Fragesatz**	der Fragesatz beschreibt, was berechnet werden soll Hier: 25 GBP = x EUR
Der **Lösungssatz**	der Lösungssatz enthält die Berechnungsformel Hier: Ist noch aufzubauen

Die Arten des Dreisatzes
Dreisatz-Aufgaben gibt es in vier verschiedenen Formen. Man unterscheidet zwischen einem **einfachen** und einem **erweiterten** Dreisatz. Diese beiden Begriffe werden wiederum unterschieden in einen **proportionalen** (direkten) und einen **umgekehrt proportionalen** (indirekten) Dreisatz. Außerdem gibt es noch den **unterbrochenen Dreisatz**, bei dem sich aufgrund bestimmter Faktoren das angegebene Verhältnis ändert.

Der einfache Dreisatz
Der einfache Dreisatz besteht aus drei Zahlwerten sowie einem vierten Wert, der berechnet werden soll (siehe das o. g. Beispiel mit den GBP und EUR).

Der erweiterte Dreisatz
Der erweiterte Dreisatz besteht aus mindestens fünf Zahlenwerten sowie einem sechsten Wert, der zu berechnen ist.

Beispiel:
2 Kühe benötigen für 48 kg Gras 24 Stunden. Wie lange benötigen 5 Kühe für 30 kg Gras?

2 Kühe	48 kg	=	24 Std
5 Kühe	30 kg	=	x Std

Proportionaler Dreisatz
Von einem proportionalen Dreisatz spricht man, wenn sich zwei Werte, die zueinander ins Verhältnis gesetzt sind, jeweils in die gleiche Richtung verändern:

- Wird der erste Wert **größer**, so wird auch der zweite Wert **größer**
- Wird der erste Wert **kleiner**, so wird auch der zweite Wert **kleiner**

Die beiden Werte verhalten sich zueinander proportional.

Beispiel:

10 GBP	=	13 EUR
25 GBP	=	x EUR

Erhöht man die Anzahl der GBP, so wird die Zahl der EUR ebenfalls größer. Senkt man die Anzahl der GBP ab, so wird die Zahl der EUR ebenfalls kleiner.

Umgekehrt proportionaler Dreisatz
Bei einem umgekehrt proportionalen Dreisatz verhalten sich die zwei Werte, die zueinander in Verhältnis gesetzt sind, genau entgegengesetzt:

- Wird der erste Wert **größer**, so wird der zweite Wert **kleiner**
- Wird der erste Wert **kleiner**, so wird der zweite Wert **größer**

Die beiden Werten verhalten sich zueinander entgegengesetzt.

Beispiel:

10 Arbeiter	=	13 Stunden
25 Arbeiter	=	x Stunden

Erhöht man die Anzahl der Arbeiter, so wird die Arbeit früher fertig. Also sinkt die Stundenzahl. Reduziert man die Anzahl der Arbeiter, so verschiebt sich das Ende des Auftrags nach hinten. Die Zahl der Stunden erhöht sich.

Sonderfall erweiterter Dreisatz

Während beim einfachen Dreisatz die Frage nach proportionalen oder umgekehrt proportionalen Zahlen eindeutig geklärt werden kann, ist dies bei einem erweiterten Dreisatz nicht möglich. Hier muss die Frage nach einem proportionalen oder umgekehrt proportionalen Verhältnis für jeden einzelnen Wert geklärt werden. In dem Beispiel

2 Kühe	48 kg	=	24 Std
5 Kühe	30 kg	=	x Std

muss für das Verhältnis von Kühen zu Stunden bzw. von Kilogramm zu Stunden die Art der Proportionalität jeweils einzeln bestimmt werden.

Warum ist die Art der Proportionalität so wichtig?

Je nach Proportionalität ergeben sich beim Dreisatz unterschiedliche Berechnungsmethoden. Daher ist es zwingend notwendig, die Art der Proportionalität in einer Dreisatzaufgaben zu kennen.

Der unterbrochene Dreisatz

Eine Besonderheit ist der unterbrochene Dreisatz. Hier verändert sich das Verhältnis zweier Wert zueinander aufgrund bestimmter Faktoren.

Beispiel:

Ein Trupp Holzfäller, bestehend aus 10 Personen, soll eine bestimmte Anzahl von Bäumen fällen (die genaue Anzahl ist hier nicht wichtig, weil sie sich im Laufe der Aufgabe nicht verändert). Für diese Arbeit wird eine Zeit von 8 Stunden angesetzt. Nach 3 Stunden Arbeit ereignet sich ein Unfall. Ein Holzfäller muss ins Krankenhaus eingeliefert werden. Das übernehmen zwei Kollegen. Die anderen Holzfäller arbeiten weiter. Zwei Stunden später kommen die beiden Begleiter aus dem Krankenhaus zurück und nehmen ihre Arbeit wieder auf. Wie lange braucht der Trupp Holzfäller jetzt insgesamt, bis der Auftrag erledigt ist?

Der Aussagesatz ist eindeutig: 10 Holzfäller = 8 Stunden

Um die Aufgabe zu lösen, müssen die Verhältnisse mehrfach geändert werden.

Dreisatz - Lösungsmethoden

Um eine Dreisatzaufgabe zu lösen, gibt es unterschiedliche Methoden. Hier sollen nur zwei der möglichen Methoden vorgestellt werden: Die „klassische“ Methode und die „einfache“ Methode.

Einfacher propotionaler Dreisatz
10 Britische Pfund haben den gleichen Wert wie 13 Euro. Welchem Euro-Wert entsprechen 25 Britische Pfund?

10 GBP	=	13 EUR
25 GBP	=	x EUR

Bei diesem Dreisatz handelt es sich um einen einfachen Dreisatz, wobei die Werte sich zueinander proportional verhalten

Die klassische Methode

Als ersten Schritt müssen wir den Wert für 1 GBP ermitteln. Da sich beide Werte zueinander proportional verhalten und wir von 10 GBP auf 1 GBP verringern (also 10 GBP durch 10 teilen), müssen wir auch die 13 EUR entsprechend verringern (also 13 EUR durch 10 teilen)	10 GBP / 10 = 13 EUR / 10
Damit bekommen wir ein neues Verhältnis	1 GBP = 1,3 EUR
Nun kennen wir das Verhältnis für 1 GBP. Wir wollen aber das Verhältnis für 25 GBP wissen. Also müssen wir beide Werte (1 GBP und 1,3 EUR) mit 25 multiplizieren	1 GBP * 25 = 1,3 EUR * 25
Das ergibt	25 GBP = 32,50 EUR

Die „einfache“ Methode

Die „einfache“ Methode mag auf den ersten Blick ungewohnt, vielleicht auch kompliziert aussehen. Das ist sie aber nicht. Sie hat z. B. den großen Vorteil, dass man sich nur ein Berechnungsverfahren merken muss, egal ob es sich um einen einfachen oder einen erweiterten, um einen proportionalen oder einen umgekehrt proportionalen Dreisatz handelt. Es wird immer nur die gleiche Methode verwendet!

Als erstes erzeugen wir für die Berechnung des unbekannte EUR-Wertes einen Bruchstrich

$$x \text{ EUR} = \frac{\quad}{\quad}$$

Oben auf den Bruchstrich stellen wir den Wert, der in unserer kleinen Datentabelle oberhalb des X steht

$$x \text{ EUR} = \frac{13 \text{ EUR}}{\quad}$$

Nun untersuchen wir den Aussagesatz: Wie verhalten sich die GBP zu den EUR? Wenn die GBP kleiner werden, werden dann auch die EUR kleiner? Ist das so, wandert der Wert der GBP unter den Bruchstrich. Andernfalls gehen die GBP oben auf den Bruchstrich.

$$x \text{ EUR} = \frac{13 \text{ EUR}}{10 \text{ GBP}}$$

Jetzt fehlen in unserer Berechnung nur noch die 25 GBP. Da die 10 GBP in der Berechnungsformel nach unten gegangen sind, müssen die 25 GBP nach oben. Nun noch zwischen den Zahlen das Multiplikationszeichen setzen.
Die in der Datentabelle untereinander stehenden Pärchen finden sich in der Berechnungsformel auf unterschiedlichen Seiten des Bruchstriches wieder.

$$x \text{ EUR} = \frac{13 \text{ EUR} * 25 \text{ GBP}}{10 \text{ GBP}}$$

Ergebnis

$$x \text{ EUR} = 32{,}50 \text{ EUR}$$

Einfacher umgekehrt propotionaler Dreisatz

Für einen Arbeitsauftrag werden 10 Arbeiter eingesetzt. Die Arbeit ist nach 13 Stunden erledigt. Wann ist die Arbeit erledigt, wenn man 25 Arbeiter einsetzt?

10 Arbeiter	=	13 Stunden
25 Arbeiter	=	x Stunden

Bei diesem Dreisatz handelt es sich um einen einfachen Dreisatz, wobei die Werte sich zueinander umgekehrt proportional verhalten

Die klassische Methode

Als ersten Schritt müssen wir den Wert für 1 Arbeiter ermitteln. Da sich beide Werte zueinander umgekehrt proportional verhalten und wir von 10 Arbeitern auf 1 Arbeiter verringern (also 10 Arbeiter durch 10 teilen), müssen wir die 13 Stunden entsprechend erhöhen (also 13 Stunden mal 10 nehmen)	10 Arbeiter / 10 = 13 Std * 10
Damit bekommen wir ein neues Verhältnis	1 Arbeiter = 130 Std
Nun kennen wir das Verhältnis für 1 Arbeiter. Wir wollen aber das Verhältnis für 25 Arbeiter wissen. Also müssen wir den Wert Arbeiter mit 25 multiplizieren und den Wert Stunden durch 25 teilen	1 Arbeiter * 25 = 130 Std / 25
Das ergibt	25 Arbeiter = 5,2 Std

Die „einfache" Methode

Als erstes erzeugen wir für die Berechnung des unbekannte Wertes einen Bruchstrich

$$x \text{ Std} = \frac{\quad}{\quad}$$

Oben auf den Bruchstrich stellen wir den Wert, der in unserer kleinen Datentabelle oberhalb des X steht

$$x \text{ Std} = \frac{13 \text{ Std}}{\quad}$$

Nun untersuchen wir den Aussagesatz: Wie verhalten sich die Arbeiter zu den Stunden? Wenn die Anzahl der Arbeiter kleiner wird, ist der Auftrag dann in weniger oder in mehr Stunden erledigt? Bei „weniger" wandert der Wert der Arbeiter unter den Bruchstrich. Anderenfalls gehen die Arbeiter oben auf den Bruchstrich.

$$x \text{ Std} = \frac{13 \text{ Std} \quad 10 \text{ Arbeiter}}{\quad}$$

Jetzt fehlen in unserer Berechnung nur noch die 25 Arbeiter. Da die 10 Arbeiter in der Berechnungsformel nach oben gegangen sind, müssen die 25 Arbeiter nach unten. Nun noch zwischen den Zahlen das Multiplikationszeichen setzen.
Die in der Datentabelle untereinander stehenden Pärchen finden sich in der Berechnungsformel auf unterschiedlichen Seiten des Bruchstriches wieder.

$$x \text{ Std} = \frac{13 \text{ Std} * 10 \text{ Arbeiter}}{25 \text{ Arbeiter}}$$

Ergebnis

$$x \text{ Std} = 5{,}2 \text{ Std}$$

Erweiterter Dreisatz
2 Kühe fressen in 24 Stunden zusammen 48 kg Gras. Wie lange benötigen 5 Kühe für 30 kg Gras?

2 Kühe	48 kg	=	24 Std
5 Kühe	30 kg	=	x Std

Bei diesem Dreisatz handelt es sich um einen erweiterten Dreisatz, wobei für die einzelnen Werte jeweils ermittelt werden muss, ob es sich um ein proportionales oder umgekehrt proprotionales Verhältnis handelt.

2 Kühe benötigen für 48 kg Gras 24 Stunden.
1 Kuh (Wert verringert) benötigt für 48 kg Gras mehr Stunden (Wert erhöht) → Kühe stehen zu Stunden im umgekehrt proportionalem Verhältnis.

2 Kühe benötigen für 48 kg Gras 24 Stunden.
2 Kühe benötigen für 1 kg Gras (Wert verringert) weniger Stunden (Wert verringert) → Gras steht zu Stunden im proportionalem Verhältnis.

Die klassische Methode

Als ersten Schritt müssen wir den Wert für 1 Kuh ermitteln. Da sich beide Werte zueinander umgekehrt proportional verhalten und wir von 2 Kühen auf 1 Kuh verringern (also 2 Kühe durch 2 teilen), müssen wir die 24 Stunden entsprechend erhöhen (also 24 Stunden mal 2 nehmen)

2 Kühe / 2 = 24 Std * 2

Damit bekommen wir ein neues Verhältnis

1 Kuh = 48 Std

Ergänzen wir das Verhältnis um die Menge Gras

1 Kuh 48 kg Gras = 48 Std

Nun bringen wir das Verhältnis von Gras zu Stunden auf den Wert 1 kg. Da sich beide Werte zueinander proportional verhalten und wir von 48 kg auf 1 kg verringern (also 48 kg durch 48 teilen), müssen wir auch die 48 Std entsprechend verringern (also 48 kg durch 48 teilen)

48 kg Gras / 48 = 48 Std / 48

Damit bekommen wir das Verhältnis für 1 Kuh und 1 kg Gras

1 Kuh 1 kg Gras = 1 Std

Nun kennen wir das Verhältnis für 1 Kuh und 1 kg Gras. Wir wollen aber das Verhältnis für 30 kg Gras wissen. Also müssen wir den Wert kg mit 30 multiplizieren und ebenfalls den Wert Std (proportionales Verhältnis)

1 kgGras * 30 = 1 Std * 30

Das ergibt

1 Kuh 30 kg Gras = 30 Std

Die Anzahl der Kühe beträgt aber nicht 1, sondern 5. Wir müssen die Zahl der Kühe mit 5 multiplizieren. Da sich Kühe und Stunden in einem umgekehrt proportionalem Verhältnis befinden, müssen wir die vorhandene Stundenzahl durch 5 teilen

1 Kuh * 5 = 30 Std / 5

Daraus ergibt sich

5 Kühe 30 kg Gras = 6 Stunden

Die „einfache" Methode

Als erstes erzeugen wir für die Berechnung des unbekannte Wertes einen Bruchstrich

$$x \text{ Std} = \frac{\quad}{\quad}$$

Oben auf den Bruchstrich stellen wir den Wert, der in unserer kleinen Datentabelle oberhalb des gesuchten X steht

$$x \text{ Std} = \frac{24 \text{ Std}}{\quad}$$

Nun untersuchen wir den ersten Wert im Aussagesatz: Wie verhalten sich die Kühe zu den Stunden? Wenn die Anzahl der Kühe kleiner wird, wie verändern sich die Stunden? Die Stunden werden mehr. Also wandert die Zahl der Kühe nach oben auf den Bruchstrich

$$x \text{ Std} = \frac{24 \text{ Std} \quad 2 \text{ Kühe}}{\quad}$$

Jetzt prüfen wir den zweiten Wert im Aussagesatz: Wie verhält sich das Gras zu den Stunden? Wenn die Menge des Grases kleiner wird, wie verändern sich die Stunden? Die Stunden werden kleiner. Also wandert die Grasmenge nach unter den Bruchstrich

$$x \text{ Std} = \frac{24 \text{ Std} \quad 2 \text{ Kühe}}{48 \text{ kg Gras}}$$

Nun zu den Werten aus dem Fragesatz. Die 5 Kühe gehen nach unten, weil die 2 Kühe oben stehen. Die 30 kg Gras gehen nach oben, weil die 48 kg Gras unten stehen. Dann noch das Multiplikationszeichen zwischen den einzelnen Werten eintragen.

$$x \text{ Std} = \frac{24 \text{ Std} * 2 \text{ Kühe} * 30 \text{ kg Gras}}{5 \text{ Kühe} * 48 \text{ kg Gras}}$$

Ergebnis

x Std = 6 Std

Der unterbrochene Dreisatz

Ein Trupp Holzfäller, bestehend aus 10 Personen, soll eine bestimmte Anzahl von Bäumen fällen (die genaue Anzahl ist hier nicht wichtig, weil sie sich im Laufe der Aufgabe nicht verändert). Für diese Arbeit wird eine Zeit von 8 Stunden angesetzt. Nach 3 Stunden Arbeit ereignet sich ein Unfall. Ein Holzfäller muss ins Krankenhaus eingeliefert werden. Das übernehmen zwei Kollegen. Die anderen Holzfäller arbeiten weiter. Zwei Stunden später kommen die beiden Begleiter aus dem Krankenhaus zurück und nehmen ihre Arbeit wieder auf. Wie lange braucht der Trupp Holzfäller jetzt insgesamt, bis der Auftrag erledigt ist?

Zunächst werden die Daten aus der Aufgaben tabellarisch aufgelistet:

10 Holzfäller	=	8 Stunden

Nun wird der Punkt gesucht, an dem sich etwas in der Aufgabenstellung ändert. In diesem Fall ist das der Unfall nach 3 Stunden Arbeit.

Nach 3 Stunden hätten 10 Holzfäller noch 5 Stunden arbeiten müssen (8 Std. – 3 Std.). Durch den Unfall fallen aber 3 Leute aus. Die Frage ist: Wie lange brauchen die restlichen 7 Holzfäller jetzt noch für die Arbeit? Tabellarisch sieht das so aus:

10 Holzfäller	=	5 Stunden
7 Holzfäller	=	x Stunden

Hier handelt es sich um einen einfachen, umgekehrt proportionalen Dreisatz. Das Ergebnis der Berechnung lautet: 7,14 Stunden (gerundet).

Nach weiteren 2 Stunden kommen die beiden Begleitpersonen vom Krankenhaus zurück. Nun wären noch 5,14 Std zu arbeiten. Durch die Rückkehr der 2 Holzfäller ändern sich erneut die Verhältnisse

7 Holzfäller	=	5,14 Stunden
9 Holzfäller	=	x Stunden

Auch hier handelt es sich um einen einfachen, umgekehrt proportionalen Dreisatz. Das Ergebnis der Berechnung lautet: 4 Stunden (gerundet).

Für den Auftrag brauchen die Holzfäller insgesamt 3 Std (Einsatz von 10 Holzfällern) + 2 Std (Einsatz von 7 Holzfällern) + 4 Std (Einsatz von 9 Holzfällern) = 9 Std total.